

MATEMATIKA

9-12. évfolyam emelt képzés

Az iskolai matematikatanítás célja, hogy hiteles képet nyújtson a matematikáról, mint tudásrendszerről és mint sajátos emberi megismerési, gondolkodási, szellemi tevékenységről. A matematika tanulása érzelmi és motivációs vonatkozásokban is formálja, gazdagítja a személyiséget, fejleszti az önálló, rendszerezett gondolkodást, és alkalmazásra képes tudást hoz létre. A matematikai gondolkodás fejlesztése segíti a gondolkodás általános kultúrájának kiteljesedését.

A matematikatanítás feladata a matematika különböző arculatainak bemutatása. A matematika: kulturális örökség; gondolkodásmód; alkotó tevékenység; a gondolkodás örömeinek forrása; a mintákban, struktúrákban tapasztalható rend és esztétikum megjelenítője; önálló tudomány; más tudományok segítőtje; a mindennapi élet része és a szakmák eszköze.

A tanulók matematikai gondolkodásának fejlesztése során alapvető cél, hogy mindinkább ki tudják választani és alkalmazni tudják a természeti és társadalmi jelenségekhez illeszkedő modelleket, gondolkodásmódokat (analógiás, heurisztikus, becslésen alapuló, matematikai logikai, axiomatikus, valószínűségi, konstruktív, kreatív stb.), módszereket (aritmetikai, algebrai, geometriai, függvénytani, statisztikai stb.) és leírásokat. A matematikai nevelés sokoldalúan fejleszti a tanulók modellalkotó tevékenységét. Ugyanakkor fontos a modellek érvényességi körének és gyakorlati alkalmazhatóságának eldöntését segítő képességek fejlesztése. Egyaránt lényeges a reprodukív és a problémamegoldó, valamint az alkotó gondolkodásmód megismerése, elsajátítása, miközben nem szorulhat háttérbe az alapvető tevékenységek (pl. mérés, alapszerkesztések), műveletek (pl. aritmetikai, algebrai műveletek, transzformációk) automatizált végzése sem. A tanulás elvezethet a matematika szerepének megértésére a természet- és társadalomtudományokban, a humán kultúra számos ágában. Segít kialakítani a megfogalmazott összefüggések, hipotézisek bizonyításának igényét. Megmutathatja a matematika hasznosságát, belső szépségét, az emberi kultúrában betöltött szerepét. Fejleszti a tanulók térbeli tájékozódását, esztétikai érzékét.

A tanulási folyamat során fokozatosan megismertetjük a tanulókkal a matematika belső struktúráját (fogalmak, axiómák, tételek, bizonyítások elsajátítása). Mindezzel fejlesztjük a tanulók absztrakciós és szintetizáló képességét. Az új fogalmak alkotása, az összefüggések felfedezése és az ismeretek feladatokban való alkalmazása fejleszti a kombinatív készséget, a kreativitást, az önálló gondolatok megfogalmazását, a felmerült problémák megfelelő önbizalommal történő megközelítését, megoldását. A diskussziós képesség fejlesztése, a többféle megoldás keresése, megtalálása és megbeszélése a többféle nézőpont érvényesítését, a komplex problémakezelés képességét is fejleszti. A folyamat végén a tanulók eljutnak az önálló, rendszerezett, logikus gondolkodás bizonyos szintjére.

A műveltségi terület a különböző témakörök szerves egymásra épülésével kívánja feltárni a matematika és a matematikai gondolkodás világát. A fogalmak, összefüggések érlelése és a matematikai gondolkodásmód kialakítása egyre emelkedő szintű spirális felépítést indokol - az életkori, egyéni fejlődési és érdeklődési sajátosságoknak, a bonyolódó ismereteknek, a fejlődő absztrakciós képességnek megfelelően. Ez a felépítés egyaránt lehetővé teszi a lassabban haladókkal való foglalkozást és a tehetség kibontakoztatását.

A matematikai értékek megismerésével és a matematikai tudás birtokában a tanulók hatékonyan tudják használni a megszerzett kompetenciákat az élet különböző területein. A matematika a maga hagyományos és modern eszközeivel segítséget ad a természettudományok, az informatika, a technikai, a humán műveltségterületek, illetve a választott szakma ismeretanyagának tanulmányozásához, a mindennapi problémák értelmezéséhez, leírásához és kezeléséhez. Ezért a tanulóknak rendelkezniük kell azzal a képességgel és készséggel, hogy alkalmazni tudják matematikai tudásukat, és felismerjék, hogy a megismert fogalmakat és tételeket változatos területeken használhatjuk. Az adatok, táblázatok, grafikonok értelmezésének megismerése nagyban segítheti a mindennapokban, és különösen a média közleményeiben való reális tájékozódást. Mindehhez elengedhetetlen egyszerű matematikai szövegek értelmezése, elemzése. A tanulóktól megkívánjuk a szaknyelv életkornak megfelelő, pontos használatát, a jelölésrendszer helyes alkalmazását írásban és szóban egyaránt.

A tanulók rendszeresen oldjanak meg önállóan feladatokat, aktívan vegyenek részt a tanítási, tanulási folyamatban. A feladatmegoldáson keresztül a tanulók képessé válhatnak a pontos, kitartó, fegyelmezett munkára. Kialakul bennük az önellenőrzés igénye, a sajátjukétól eltérő szemlélet tisztelete. Mindezek érdekében is a tanítás folyamatában törekedni kell a tanulók pozitív motiváltságának biztosítására, önállóságuk fejlesztésére. A matematikatanítás és tanulás folyamatában egyre nagyobb szerepet kaphat az önálló ismeretszerzés képesség fejlesztése az ajánlott, illetve az önállóan megkeresett, nyomtatott és internetes szakirodalom által. A matematika a lehetőségekhez igazodva támogatni tudja az elektronikus eszközök (zsebszámológép, számítógép, grafikus kalkulátor), internet, oktatóprogramok stb. célszerű felhasználását, ezzel hozzájárul a digitális kompetencia fejlődéséhez.

A tananyag egyes részleteinek csoportmunkában történő feldolgozása, a feladatmegoldások megbeszélése az együttműködési képesség, a kommunikációs képesség fejlesztésének, a reális önértékelés kialakulásának fontos területei. Ugyancsak nagy gondot kell fordítani a kommunikáció fejlesztésére (szövegértésre, mások szóban és írásban közölt gondolatainak meghallgatására, megértésére, saját gondolatok közlésére), az érveken alapuló vitakészség fejlesztésére. A matematikai szöveg értő olvasása, tankönyvek, lexikonok használata, szövegekből a lényeg kiemelése, a helyes jegyzeteléshez szoktatás a felsőfokú tanulást is segíti.

Változatos példákkal, feladatokkal mutathatunk rá arra, hogy milyen előnyöket jelenthet a mindennapi életben, ha valaki jártas a problémamegoldásban. A matematikatanítás alapvető feladata a pénzügyi-gazdasági kompetenciák kialakítása. Életkortól függő szinten rendszeresen foglalkozunk olyan feladatokkal, amelyekben valamilyen probléma legjobb megoldását keressük. Szánjunk kiemelt szerepet azoknak az optimumproblémáknak, amelyek gazdasági kérdésekkel foglalkoznak, amikor költség, kiadás minimumát; elérhető eredmény, bevétel maximumát keressük. Fokozatosan vezessük be matematikafeladatainkban a pénzügyi fogalmakat: bevétel, kiadás, haszon, kölcsön, kamat, értékcsökkenés, növekedés, törlesztés, futamidő stb. Ezek a feladatok erősítik a tanulóknál azt a tudatot, hogy matematikából valóban hasznos ismereteket tanulnak, illetve, hogy a matematika alkalmazása a mindennapi élet szerves része. Az életkor előrehaladtával egyre több példát mutassunk arra, milyen területeken tud segíteni a matematika. Hívjuk fel a figyelmet arra, hogy milyen matematikai ismereteket alkalmaznak az alapvetően matematikaigényes, illetve a matematikát csak kisebb részben használó szakmák (pl. informatikus, mérnök, közgazdász, pénzügyi szakember, biztosítási szakember, valamint pl. vegyész, grafikus, szociológus), ezzel is segítve a tanulók pályaválasztását.

A matematikához való pozitív hozzáállást nagyban segíthetik a matematikai tartalmú játékok és a matematikához kapcsolódó érdekes problémák és feladványok.

A matematika a kultúrtörténetnek is része. Segítheti a matematikához való pozitív hozzáállást, ha bemutatjuk a tananyag egyes elemeinek a művészetekben való alkalmazását. A motivációs bázis kialakításában komoly segítség lehet a matematikatörténet egy-egy mozzanatának megismertetése, a máig meg nem oldott, egyszerűnek tűnő matematikai sejtések megfogalmazása, nagy matematikusok életének, munkásságának megismerése.

Minden életkori szakaszban fontos a differenciálás. Ez nemcsak az egyéni igények figyelembevételét jelenti. Sokszor az alkalmazhatóság vezérli a tananyag és a tárgyalásmód megválasztását, más esetekben a tudományos igényesség szintje szerinti differenciálás szükséges. Egy adott osztály matematikatanítása során a célok, feladatok teljesíthetősége igényli, hogy a tananyag megválasztásában a tanulói érdeklődés és a pályáorientáció is szerepet kapjon. A matematikát alkalmazó pályák felé vonzó tanulók gondolkodtató, kreativitást igénylő versenyfeladatokkal motiválhatók, a humán területen továbbtanulni szándékozók számára érdekesebb a matematika kultúrtörténeti szerepének kidomborítása, másoknak a középiskolai matematika gyakorlati alkalmazhatósága fontos. A fokozott szaktanári figyelem, az iskolai könyvtár és az elektronikus eszközök használatának lehetősége segíthetik az esélyegyenlőség megvalósulását.

Ez a kerettanterv a négy évfolyamos speciális matematikatanítás számára készült. Ennek nagy szerepe van a tudósutánpótlás biztosításában, de nagy a hatása gazdasági élet szakember utánpótlására is.

Elsődleges célunk, hogy megőrizzük a matematika tagozatos osztályok haladó hagyományait, ugyanakkor azt is várjuk, hogy az e tanterv alapján tanuló diákok a felsőoktatásban jól hasznosítható ismeretekkel hagyják el a középiskolát. A rendelkezésre álló nagyobb órakeretet hatékonyabb, de időigényes módszerek (pl. önálló felfedeztetés, differenciált feladatok) alkalmazására is fel kívánjuk használni, hasonlóképpen gondot fordítunk a felmerülő problémák részletesebb elemzésére. A tapasztalatok azt mutatták, hogy a fenti célú mérsékelt tananyag-növekedés az elért szemléletfejlődéssel és a megnövekedett gyakorlási idővel jelentős teljesítményjavulást eredményez.

Emelt szintű matematika kerettanterv szerint már ötödik (esetleg hetedik) osztálytól tanulhatnak az általános iskolások. Azonban e kerettanterv készítésekor nem tételeztük fel az általános iskolás emelt szintű tananyag ismeretét, célszerűnek látjuk az egyes témák tárgyalásának kezdetén az emelt szintű általános iskolai legfontosabb kiegészítő ismeretek áttekintését.

9-10. évfolyam

A matematika kerettantervnek ez a fejezete a négyosztályos gimnáziumok azon tanulóinak szól, akik matematikából speciális tantervű képzést választottak. Ezért a tananyag összeállításánál feltételezhetjük, hogy kiemelkedő matematikai képességű, érdeklődőbb tanulóknak szól. A normál osztályokéhoz képest kiegészítő elemek kerülnek a tananyagba. Ezek egy része motivációs erejű, vannak olyanok, amelyek az emelt szintű érettségi vizsgára való felkészülést segíthetik, vannak olyanok is, amelyek a felsőoktatásban lesznek majd hasznosíthatók. Olyan

tananyagelemeket is szerepeltetünk ezeken az évfolyamokon, amelyek biztosabbá teszik a tanulók ismereteit, kitekintést nyújtanak egy-egy témakör szélesebb körű alkalmazásaira, segíthetik a versenyeken való eredményesebb szereplésüket. Nem feltétlenül törekszünk a tananyag erőszakos növelésére, a korosztálynak megfelelő, mélyebb tárgyalást tartjuk elsődlegesnek.

A középiskola első két évfolyamán sok, korábban már szereplő ismeret, összefüggés, fogalom újra előkerül úgy, hogy a fogalmak definiálásán, a tételek igazolásán, rendszerezésén, kapcsolataik feltárásán és alkalmazási lehetőségeik megismerésén lesz a hangsúly. A kerettantervben szereplő tételek nagy többségét is bizonyítani kell. Ezért a tanulóknak meg kell ismerkedniük a tudományos feldolgozás alapvető módszereivel. (Mindenki által elfogadott alapelvek/axiómák, már bizonyított állítások, új sejtések, állítások megfogalmazása és azok igazolása, a fentiek összegzése, a nyitva maradt kérdések felsorolása, a következmények elemzése.)

A fenti célok az általános iskolai matematikatanítás céljaihoz képest jelentős többletet jelentenek. Fontos, hogy változatos módszertani megoldásokkal tegyük könnyebbé az átmenetet. Hasznosak lehetnek ebből a szempontból a matematikai alapú játékok is. A gyerekek szívesen játszanak maradékos osztáson, oszthatósági szabályokon alapuló számjátékokat és szimmetriákon alapuló geometriai, rajzos játékokat. Nyerni akarnak, ezért természetes módon elemezni kezdik a szabályokat, lehetőségeket. Olyan következtetésekre jutnak, olyan elemzéseket végeznek, amelyeket hagyományos feladatokkal nem tudnánk elérni. A geometria egyes területeinek (szimmetriák, aranymetszés) a művészetekben való alkalmazásait bemutatva világossá tehetjük a tanulók előtt, hogy a matematika a kultúra elválaszthatatlan része. A témakör egyes elemeihez kapcsolódva mutassuk be néhány matematikus életútját! Az ezekre a témákra fordított idő bőven megtérül az ennek következtében növekvő érdeklődés, javuló motiváció miatt.

Változatos példákkal, feladatokkal mutathatunk rá arra, hogy milyen előnyöket jelenthet a mindennapi életben, ha valaki jól tud problémákat megoldani. Gazdasági, sport témájú feladatokkal, számos geometriai és algebrai szélsőérték-feladattal lehet gyakorlati kérdésekre optimális megoldásokat keresni.

A középiskolás kor már alkalmassá teszi a tanulókat az önálló ismeretszerzésre. Legyen követelmény, hogy egyes adatoknak, fogalmaknak, ismereteknek könyvtárban, interneten nézzenek utána. Ez a kutatómunka hozzájárulhat a tanulók digitális kompetenciájának fejlesztéséhez, ugyanezt szolgálhatja a geometriai és egyéb matematikai programok használata is.

9. évfolyam (37*2 = 74 óra)

Tematikai egység	Gondolkodási módszerek, halmazok, kombinatorika – 8 óra	
Előzetes tudás	Csoportosítás különböző szempontok alapján. Halmazműveletek véges halmazokon. Halmazábra. Számhalmazok, ponthalmazok.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A halmaz fogalmának ismerete, alkalmazása problémamegoldásra, matematikai modellek alkotására. Több szempont alkalmazása – megosztott figyelem fejlesztése. Feladatmegoldási rutin mélyítése. Definíciók, jelölések használata – az emlékezet fejlesztése.	
Ismeretek / fejlesztési követelmények	Kapcsolódási pontok	
Halmazok. Halmazokkal kapcsolatos ismeretek: üres halmaz, részhalmaz, halmazok egyenlősége. Halmazműveletek: unióképzés, metszetképzés, különbségképzés, szimmetrikus differencia, komplementer halmaz. Descartes-féle szorzat. A fogalmak ismételése, alkalmazása több halmazra. Pontos definíciók, jelölések használata. „Reláció” és műveleti tulajdonságok bizonyítása. Halmazok felbontása diszjunkt halmazok uniójára. A halmazműveletek tulajdonságai.	<i>Informatika:</i> könyvtárszerkezet a számítógépen; adatbázis-kezelés, adatállományok, adatok szűrése különböző szempontok szerint. <i>Magyar nyelv és irodalom:</i> mondatok,	
Halmazok számossága. Számosság és halmazműveletek. Logikai szita formula. n elemű halmaz részhalmazainak a száma. Véges és végtelen halmazok. (Csak „szemléletes” szinten, később részletese tárgyaljuk.) Matematikatörténet: Georg Cantor.	Szavak, hangok rendszerezése. <i>Biológia-egészségtan:</i> rendszertan.	
Konstrukciók. Lehetetlenségi bizonyítások. Adott tulajdonságú objektumok konstruálása. Adott tulajdonságú halmazok konstruálása. Ábrák színezése, lefedése adott feltételek szerint. Annak indoklása, hogy valamely konstrukció nem hozható létre. (Invariáns mennyiség keresése.)		
Kombinatorika. Permutáció - ismétlés nélkül és ismétléssel. Variáció - ismétlés nélkül és ismétléssel. Kombináció - ismétlés nélkül és ismétléssel Jelek használata: $n!$, I^n , I^k , I^J Binomiális együtthatók, egyszerű tulajdonságaik. Pascal-háromszög és tulajdonságai. Binomiális tétel. Teljes indukció Matematikatörténet: Blaise Pascal, Erdős Pál. Néhány kombinatorikus geometriai feladat. n pont maximum hány egyenest határoz meg? n egyenesnek maximum hány metszéspontja lehet? n egyenes maximum hány részre osztja a síkot?		
Kulcsfogalmak / fogalmak	Véges és végtelen halmaz, unió, metszet, különbség, komplementer halmaz. Permutáció, variáció, kombináció, teljes indukció.	

Tematikai egység	Számelmélet, algebra, valós számok – 5 óra	
Előzetes tudás	Természetes számok, egész számok, racionális számok halmaza. Műveletek elvégzése a racionális számok halmazán fejből, írásban, számológéppel. Műveletek sorrendje, zárójelek használata. Hatványozás.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A számkör bővítése elveinek megértése, a valós számok halmazának ismerete. Gondolkodás: ismeretek rendszerezésének fejlesztése. Indirekt bizonyítási módszer alkalmazása. Absztrakciós készség fejlesztése.	
Ismeretek / fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>Számhalmazok:</p> <ul style="list-style-type: none"> - természetes számok, - egész számok, - racionális számok, - irracionális számok, - valós számok. <p>Mely műveletek nem vezetnek ki az egyes számhalmazokból? A racionális számok halmazán végzett műveletek biztonságos elvégzése - ismétlés, gyakorlás. Műveleti tulajdonságok alkalmazása: kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás. Számok tizedes tört alakja. Véges, végtelen szakaszos, végtelen nem szakaszos tizedes törtek. Irracionális szám kétoldali közelítése racionális számokkal. Hatványozás és azonosságai egész kitevőre. Számok normálalakja. Számolás normálalakban felírt számokkal. Normálalak a számológépen. A valós számok és a számegyenes kapcsolata. - A racionális számok halmaza nem elegendő a számegyenes pontjainak jelölésére.</p>		<p><i>Fizika, kémia, biológia-egészségtan:</i> a tér, az idő, az anyagmennyiség nagy és kis méreteinek megadása normálalakkal.</p>
<p>Négyzetgyök fogalma. A négyzetgyökvonás azonosságai. Kivétel a gyökjel alól, bevétel a gyökjel alá. Nevező gyöktelenítése. n irracionális, ha n nem négyzetszám. Indirekt bizonyítás.</p>		
Kulcsfogalmak / fogalmak	Valós szám, normálalak, négyzetgyök.	

Tematikai egység	Algebrai kifejezések használata – 5 óra	
Előzetes tudás	Összefüggések leírása algebrai kifejezésekkel, $(a \pm b)^2$, $a^2 - b^2$, helyettesítési érték, zárójelfelbontás.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Algebrai kifejezések biztonságos használata, célszerű átalakítási módok megtalálása, elvégzése.	
Ismeretek / fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok

Algebrai kifejezések. Polinomok, törtkifejezések. Racionális és nem racionális kifejezések.	<i>Fizika; kémia:</i> mennyiségek kiszámítása képlet alapján, képletek átrendezése.
Nevezetes azonosságok: $(a \pm b)^2$, $(a + b + c)^2$, $a^2 - b^2$, $a^3 - b^3$, $a^3 + b^3$. $a^n - b^n$, $a^{2k+1} + b^{2k+1}$ Geometria: azonosságok „rajzos” igazolása.	
Azonos átalakítások. Polinomok összeadása, kivonása.	
Polinomok szorzása, hatványozása. Szorzattá alakítás különböző módszerei. Polinomok maradékos osztása. Algebrai törtekkel végzett műveletek. Algebrai törtek egyszerűsítése, összeadása, kivonása, szorzása, osztása. Kifejezések legnagyobb közös osztója, legkisebb közös többszöröse. Matematikatörténet: algebra - Al-Hvarizmi.	
Számtani, mértani, négyzetes és harmonikus közép, hatványközép, és a köztük lévő egyenlőtlenség. Algebrai bizonyítás két és több tagra. Szélsőérték-feladatok közepek segítségével. Kapcsolat: másodfokú függvények vizsgálata.	
Kulcsfogalmak / fogalmak	Algebrai kifejezés, polinom, algebrai tört, azonosság.

Tematikai egység	Számelmélet, oszthatóság – 8 óra	
Előzetes tudás	Osztó, többszörös, prímszám, prímtényező felbontás, legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A korábbi években szerzett ismeretek elmélyítése, bővítése.	
Ismeretek / fejlesztési követelmények	Kapcsolódási pontok	
Osztó, többszörös, oszthatóság, oszthatósági szabályok. Az oszthatósági szabályok. Analogiák nem tízes alapú számrendszerek oszthatósági szabályaiban. Algebrai azonosságok alkalmazása oszthatósági feladatokban. Teljes indukció alkalmazása oszthatósági feladatokban.		
Prímszám, összetett szám, prímtényező felbontás. A számelmélet alaptétele. Osztójáték. Végtelen sok prímszám van. Néhány további tétel és sejtés a prímszámok elhelyezkedéséről. Legkisebb közös többszörös, legnagyobb közös osztó. Euklideszi algoritmus. Osztók számának, összegének, szorzatának meghatározása a prímtényező felbontásból.	<i>Informatika:</i> nagy prímek szerepe a titkosításban.	

Kulcsfogalmak / fogalmak	Osztó, többszörös, prím, prímtényező felbontás, a számelmélet alaptétele, legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös.
--------------------------	---

Tematikai egység	Egyenlet, egyenlőtlenség, egyenletrendszer – 8 óra	
Előzetes tudás	Egyismeretlenes, elsőfokú egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása. Alaphalmaz vizsgálata, ellenőrzés. Azonosság. Szöveges feladatok - matematikai modell alkotása.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Gyakorlati problémák matematikai modelljének felállítása, a modell hatókörének vizsgálata, a kapott eredmény összevetése a valósággal; az ellenőrzés fontossága. A problémához illő számítási mód kiválasztása, eredmény kerekítése a problémának megfelelően. Számológép használata. Az önellenőrzés képességének fejlesztése.	
Ismeretek / fejlesztési követelmények	Kapcsolódási pontok	
Egyenletek. Alaphalmaz, megoldáshalmaz, igazsághalmaz. Egyenletek megoldása grafikus módszerrel, alaphalmaz és értékészlet vizsgálatával, algebrai módszerekkel. Egyenletek ekvivalenciája. Elsőfokú egyenletek.	<i>Fizika; kémia:</i> képletek értelmezése, egyenletek rendezése.	
Elsőfokú egyenlettel megoldható szöveges feladatok. A korábban tanult módszerek elmélyítése. További módszerek szöveges feladatok megoldására. Példák egyenlet nélküli megoldási módszerekre.	<i>Fizika:</i> kinematika, dinamika. <i>Kémia:</i> oldatok összetétele.	
Törtes egyenletek, egyenlőtlenségek. Értelmezési tartomány vizsgálata, hamis gyök. Mikor lesz egy tört értéke nulla, pozitív, negatív?		
Elsőfokú paraméteres egyenletek és egyenlőtlenségek.		
Abszolút értéket tartalmazó egyenletek. (Több abszolút értéket tartalmazók is.) Abszolút értéket tartalmazó egyenlőtlenségek. Algebrai és grafikus megoldás.	<i>Fizika:</i> a mérés hibája.	
Elsőfokú egyenletrendszerek. Egyenletrendszerek grafikus megoldása. Behelyettesítő módszer. Egyenlő együtthatók módszere. Új ismeretlen bevezetése. Gauss-elimináció. Elsőfokú paraméteres egyenletrendszerek. Egyenletrendszerrel megoldható szöveges feladatok. A kapott eredmény értelmezése, valóságtartalmának vizsgálata.	<i>Informatika:</i> számítógépes program használata.	
Elsőfokú egyenlőtlenségek. Egyenlőtlenségek grafikus megoldása. Egyismeretlenes egyenlőtlenségrendszer.		

<p>Másodfokú függvények vizsgálata. Teljes négyzetté alakítás használata. Másodfokú egyenletek. Grafikus megoldás. Teljes négyzetté kiegészítés. Egyenletmegoldás szorzattá alakítással. A másodfokú egyenlet megoldóképlete. A megoldóképlet készségi szintű alkalmazása. Számológép használata. A másodfokú egyenlet diszkriminánsa. Diszkusszió. Önellenzés. Gyöktényezős alak, Viete-formulák. Másodfokúra visszavezethetó egyenletek. Új ismeretlen bevezetése. Racionális gyökök keresése. Viete-formulák. Néhány további módszer az egyenlet speciális tulajdonságainak felhasználásával. Szélsóérték-feladatok Másodfokú függvény vizsgálatával. Kapcsolat: számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség felhasználásával történő megoldás. Optimális megoldásokra törekvés.</p>	<p><i>Fizika:</i> fizikai tartalmú minimum- és maximumproblémák. <i>Filozófia:</i> egy adott rendszeren belül megoldhatatlan problémák létezése.</p>
<p>Másodfokú egyenlettel megoldható szöveges feladatok. Modellalkotás, megoldási módszerek.</p>	<p><i>Fizika:</i> egyenletesen gyorsuló mozgás leírása. <i>Informatika:</i> számítógépes program használata.</p>
<p>Kulcsfogalmak / fogalmak</p>	<p>Elsőfokú egyenlet, egyenlőtlenség, értelmezési tartomány, azonosság. Ekvivalens átalakítás, hamis gyök. Másodfokú egyenlet, egyenlőtlenség, megoldóképlet, diszkrimináns. Egyenletrendszer. Négyzetgyökös egyenlet. Paraméteres egyenlet. Magasabb fokú egyenletek.</p>

Tematikai egység	Geometria, alapfogalmak, pontthalmazok, transzformációk – 12 óra
<p>Előzetes tudás</p>	<p>Tételek kölcsönös helyzete, távolsága. Háromszögek, négyszögek, sokszögek tulajdonságai. Speciális háromszögek, négyszögek elnevezése, felismerése, tulajdonságaik. Háromszögek szerkesztése alapadatokból.. A Pitagorasz-tétel ismerete. Geometriai transzformációk, a szimmetria felismerése környezetünkben, alkalmazásuk egyszerű feladatokban.</p>
<p>A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai</p>	<p>A geometriai szemlélet, látásmód fejlesztése. A definíciók és tételek pontos ismerete. Bizonyítások gyakorlása. A szükséges és az elégséges feltétel felismerése. Összetett számítási probléma lebontása, számítási terv készítése (megfelelő részlet kiválasztása, a részletszámítások logikus sorrendbe illesztése). A geometriai transzformációk átfogó ismerete, alkalmazása problémamegoldásban. Szimmetria szerepének felismerése a matematikában, a művészetekben. Tájékozódás valóságos viszonyokról térkép és egyéb vázlatok alapján. Valós probléma geometriai modelljének megalkotása, számítások a modell alapján, az eredmények összevetése a valósággal. Számítógép használata geometriai feladatokban</p>
<p>Ismeretek / fejlesztési követelmények</p>	<p>Kapcsolódási pontok</p>

<p>Geometriai alapfogalmak, axiómák. Tételek; kölcsönös helyzete, távolsága, szöge síkban és térben. Skatulyaelvvel megoldható geometriai feladatok. Háromszögek szögei, oldalai közti összefüggések. Négyszögek. Sokszögek szögösszege, átlók száma.</p>	<p><i>Fizika:</i> szögsebesség, szöggyorsulás. <i>Vizuális kultúra:</i> térbeli viszonyok.</p>
<p>Nevezetes ponthalmazok rendszerezése.</p> <ul style="list-style-type: none"> - adott térelemtől adott távolságra lévő pontok halmaza - síkban és térben; - két térelemtől egyenlő távolságra lévő pontok halmaza - síkban és térben. - Parabola, ellipszis, hiperbola. <p>Egyenlőtlenességgel meghatározott ponthalmazok. Ponthalmazok a koordinátasíkon. Koordinátákkal megadott feltételek. Matematikatörténet: Descartes. Két vagy három feltételnek megfelelő ponthalmazok szerkesztése. Háromszög beírt, körülírt, hozzáírt körei. Háromszög további nevezetes vonalai. Középvonalak. (Négyszögek középvonalai is.). Magasságok - magasságpont. Súlyvonalak – súlypont. Geometriai szerkesztőprogram használata, bemutatása grafikus programmal.</p>	<p><i>Fizika:</i> parabolatükör. <i>Informatika:</i> geometriai szerkesztőprogram használata. <i>Fizika:</i> égitestek pályája; izotermikus állapotváltozás.</p>
<p>Pitagorasz tétele és a tétel megfordítása. Számítási feladatok síkban és térben. Pitagorasz tételének alkalmazása bizonyítási feladatokban. Mikor hegyesszögű, illetve tompaszögű a háromszög? Két pont távolsága koordináta-rendszerben. A paralelogramma oldalainak négyzetösszege egyenlő az átlók négyzetösszegével. Négyszög átlói merőlegességének feltétele. Matematikatörténet: Pitagorasz.</p>	<p><i>Fizika:</i> vektor felbontása merőleges összetevőkre.</p>
<p>Thalész tétele és a tétel megfordítása. Szerkesztési és bizonyítási feladatok. Körérintő szerkesztése. Matematikatörténet: Thalész.</p>	
<p>Geometriai transzformáció fogalma. Egybevágósági transzformációk rendszerező ismételése. Tengelyes tükrözés, középpontos tükrözés, forgatás, eltolás, identitás.</p>	<p><i>Informatika:</i> geometriai szerkesztőprogram használata.</p>
<p>A geometriai transzformációk tulajdonságai:</p> <ul style="list-style-type: none"> - fixpont, fix egyenes, fix sík, - szögtartás, távolságtartás, irányítástartás. - Szimmetrikus ponthalmazok, szimmetrián alapuló játékok. <p>Geometriai transzformációk szorzata.</p>	
<p>Geometriai szélsőérték-feladatok. Háromszögbe írt minimális területű háromszög. Izogonális pont.</p>	<p><i>Földrajz:</i> minimális utak meghatározása.</p>
<p>Az egybevágóság fogalma. Ponthalmazok egybevágósága. A háromszögek egybevágóságának alapesetei.</p>	

Műveletek vektorokkal: Összeadás, kivonás, számmal való szorzás. Vektorfelbontás tétele. Osztópont helyvektora, háromszög súlypontjának helyvektora. Vektorok térben. Vektor koordinátái. Analógia a számhalmazokon végzett műveletekkel.	<i>Fizika:</i> vektormennyiségek: erő, sebesség, gyorsulás, térerősség.
Kulcsfogalmak / fogalmak	Tételelem, sokszög, Pitagorasz-tétel, Thalész-tétel, egybevágósági transzformáció. Vektor.

Tematikai egység	Geometria, hasonlóság és kapcsolódó tételek – 4 óra	
Előzetes tudás	Egybevágósági transzformációk. A háromszögek egybevágóságának alapesetei. Számítási és mértani közép. A számítási és a mértani közép közötti egyenlőtlenség.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A geometriai szemlélet, látásmód fejlesztése. A definíciók és tételek pontos ismerete. Bizonyítások gyakorlása. Tájékozódás valóságos viszonyokról térkép és egyéb vázlatok alapján. Valós probléma geometriai modelljének megalkotása, számítások a modell alapján, az eredmények összevetése a valósággal. Számítógép használata geometriai feladatokban.	
Ismeretek / fejlesztési követelmények	Kapcsolódási pontok	
A párhuzamos szelők tétele és megfordítása, következmények. Szögfelező tétel. A párhuzamos szelőszakaszok tétele. Szakasz arányos osztása. Negyedik arányos szerkesztése.		
A középpontos hasonlóság fogalma és tulajdonságai. A hasonlósági transzformáció fogalma és tulajdonságai. Szerkesztési, számítási, bizonyítási feladatok. Euler-egyenest. Feuerbach-kör.	<i>Földrajz:</i> térképek. <i>Vizuális kultúra:</i> építészeti tervrajzok. <i>Fizika:</i> optikai eszközök nagyítása.	
Hasonló pontthalmazok. A háromszögek hasonlóságának alapesetei. A sokszögek hasonlósága. Heron-képlet A hasonló síkidomok területének aránya. A hasonló testek felszínének és térfogatának aránya. Annak tudatosítása, hogy kicsinyítésnél, nagyításnál a lineáris méretek, a felszín és térfogat nem egyformán változik.	<i>Fizika:</i> hasonló háromszögek alkalmazása - lejtőmozgás, geometriai optika. <i>Biológia-egészségtan:</i> példák arra, amikor az a hasznos, hogy adott térfogathoz nagy felszín, illetve, amikor adott térfogathoz kis felszín tartozzon.	
Arányossági tételek háromszögekben. Magasságtétel, befogótétel. A számítási és a mértani közép közötti egyenlőtlenség geometriai bizonyítása. Mértani közép szerkesztése. Egyszerű szélsőérték-feladatok. <i>Ceva és Menelaosz tétele.</i>	<i>Vizuális kultúra:</i> festészet, építészet. <i>Ének-zene:</i> az aranymetszés megjelenése zenei művekben.	

<p>Két kör közös érintői. Középponti szög, a hozzá tartozó körív és körcikk. Szögek mérése. Kerületi és középponti szögek tétele. Kerületi szögek tétele. Látószögekörív. Húrnégyszög tétele és megfordítása. Feuerbach-kör. Érintőnéyszögek tétele és megfordítása. A talpponti háromszög tulajdonságai. Ptolemaiosz-tétel. Érintő és szelőszakaszok tétele. Szelőszakaszok tétele. Aranymetszés. Pontnak körre vonatkozó hatványa.</p>	
<p>További nem távolságtartó transzformációk. Merőleges affinitás. Kapcsolat a függvénytranszformációkkal. <i>Inverzió és tulajdonságai.</i></p>	
<p>Matematikatörténet: Euler. Ptolemaiosz, Feuerbach, Héron.</p>	
<p>Kulcsfogalmak / fogalmak</p>	<p>Hasonlósági transzformáció, hasonló ponthalmaz, számtani és mértani közép.</p>

Tematikai egység	Függvények – 12 óra
Előzetes tudás	Halmazok. Hozzárendelés fogalma. Grafikonok készítése, olvasása. Pontok ábrázolása koordináta-rendszerben. Lineáris függvények, fordított arányosság függvénye.
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A tanult függvények felidézése. Függvénytranszformációk algebrai és geometriai megjelenítése. Összefüggések, folyamatok megjelenítése matematikai formában (függvénymodell), vizsgálat a grafikon alapján. A vizsgálat szempontjainak kialakítása. Számítógép bevonása a függvények ábrázolásába, vizsgálatába. Logikus, pontos gondolkodás, fogalmazás fejlesztése.
Ismeretek / fejlesztési követelmények	Kapcsolódási pontok
<p>Függvény fogalma. Rendszerező ismétlés. Értelmezési tartomány, értékkészlet. A függvény megadási módjai, ábrázolása, jellemzése: zérushely, monotonitás, szélsőérték. Új fogalmak: periodicitás, paritás, korlátosság. (Pontos definíciók. Néhány esetben a tagadás megfogalmazása is: pl. egy függvény nem páros, ha...) Kapcsolat: logika elemei - bármely, van olyan, negáció. Hétköznapi állítások tagadása. Pontos fogalmazás.</p>	<p><i>Informatika:</i> függvényábrázolás, grafikonzásítás számítógépes program segítségével. <i>Magyar nyelv és irodalom:</i> hétköznapi és szaknyelvi szóhasználat.</p>
Fordított arányosság, elsőfokú törtefüggvény.	<i>Fizika; kémia:</i> fordítottan arányos mennyiségek.
Lineáris függvények. Rendszerező ismétlés. Lineáris kapcsolatok felfedezése a hétköznapiakban.	<i>Fizika; kémia:</i> egyenesen arányos mennyiségek.

Másodfokú függvények. Teljes négyzetté kiegészítés. Hatványfüggvények. Negatív egész kitevőjű hatványfüggvények. Abszolútérték-függvény. (Több abszolút értéket tartalmazók is.) Egészrész-, törtrész-, előjel- függvény, Dirichlet-féle függvény. Négyzetgyök függvény. Függvények inverze. Összetett függvények.	
Függvénytranszformációk. A tanult függvények többlépéses transzformációi. A $f(ax+b)+B$ ábrázolása A transzformációk rendszerezése, transzformációs sorrend. $ f(x) $ és f ($ x $) ábrázolása. Adott tulajdonságú függvények konstruálása.	
Kulcsfogalmak / fo- galmak	Függvény, értelmezési tartomány, értékkészlet, zérushely, monotonitás, szélsőérték, paritás. Függvénygrafikon, függvénytranszformáció.

Tematikai egység	Hegyesszögek szögfüggvényei, szögfüggvények általánosítása – 12 óra	
Előzetes tudás	Hasonlóság alkalmazása számolási feladatokban. Pitagorasz-tétel.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Síkbeli és térbeli ábra készítése a valós geometriai problémáról. Számítási feladatok, a megoldáshoz alkalmas szögfüggvény megtalálása. Számológép, számítógép hasz- nálata.	
Ismeretek / fejlesztési követelmények	Kapcsolódási pontok	
Távolságok, magasságok meghatározása arányokkal. A valóság kicsinyített ábrájáról szögeket és szakaszokat határozzunk meg méréssel és számolással. A hegyesszögek szögfüggvényeinek definíciója. Szögfüggvény értékének meghatározása számológéppel. Számítási fel- adatok szögfüggvények használatával síkban és térben.	<i>Fizika:</i> lejtőn mozgó testre ható erők kiszámítása.	
Pótszögek szögfüggvényei. Összefüggések egy hegyesszög szögfüggvényei között. Egyszerű trigonometrikus összefüggések bizonyítása. Nevezetes szö- gek szögfüggvényei: 30°; 60°; 45°. (Megtanulandók.) 18°, 36°, 54°, 72°. (Kiszámolás az „aranyháromszögből”.)		
A szögfüggvények általános értelmezése. Forgásszög, egységvektor, vektorkoordináták. A szögfüggvények előjele a különböző síknegyedekben. Szögfüggvé- nyek közötti összefüggések. Egyszerű trigonometrikus összefüggések bizonyítása. A trigonometrikus függvények. A szögfüggvények értelmezési tartománya, értékkészlete, zérushelyek, szélsőérték, periódus, monotonitás. A trigonometrikus függvények transzformáltjai, függvényvizsgálat. Egyszerű trigonometrikus egyenletek.	<i>Fizika:</i> harmonikus rezgőmozgás, hullámmozgás leírása. <i>Informatika:</i> grafikonok elkészítése számítógépes programmal.	
Kulcsfogalmak / fo- galmak	Szögfüggvény.	

10. évfolyam (37*2 = 74 óra)

Tematikai egység	Matematikai logika. Gráfok – 8 óra	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Feladatmegoldási rutin mélyítése. Definíciók, jelölések használata – az emlékezet fejlesztése.	
Ismeretek / fejlesztési követelmények	Kapcsolódási pontok	
Logika. Logikai műveletek (negáció, konjunkció, diszjunkció, implikáció, ekvivalencia) és tulajdonságaik Összevetés a halmazműveletek tulajdonságaival. Rendszerező ismétlés feladatokon keresztül. A köznapi szóhasználat és a matematikai szóhasználat összevetése. Logikai és halmazelméleti műveletek kapcsolata. Következtetések. Normálformák. A logikai áramkörök elméletének elemei. Matematikatörténet: Pólya György, George Boole.		
Gráfok. Néhány probléma ábrázolása gráfokkal. Gráfelméleti alapfogalmak. Vonalak, körök, utak (séta, vonal, út, kör). Euler-vonal. Euler-körvonal. Hamilton-kör. Hamilton-út.		
Kulcsfogalmak / fogalmak	Véges és végtelen halmaz, unió, metszet, különbség, komplementer, halmaz. Permutáció, variáció, kombináció, logikai művelet, gráf.	

Tematikai egység	Gyökvonás, logaritmus – 10 óra	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Feladatmegoldási rutin mélyítése. Definíciók, jelölések használata.	
Ismeretek / fejlesztési követelmények	Kapcsolódási pontok	
Az n-edik gyök fogalma. A gyökvonás azonosságai. Páros és páratlan gyökkitevő. Bevitel a gyökjel alá. Kivitel a gyökjel alól. A szerkeszthetőség néhány kérdése. Permanenciaelv. A racionális kitevőjű hatványok. Számolás racionális kitevőjű hatványokkal, gyökös kifejezésekkel. A hatványfogalom kiterjesztése irracionális kitevőre. Hatványozás kiterjesztése valós kitevőre.		

<p>A logaritmus fogalma. Logaritmus értékének meghatározása a definíció alapján és számológéppel. A logaritmus azonosságai. Szorzat, hányados, hatvány logaritmus, át- térés más alapú logaritmusra. Az értelmezési tartomány változásának vizsgálata az azonosságok két- irányú alkalmazásánál. A logaritmus azonosságainak alkalmazása kifejezések számértékének meghatározására, kifejezések átalakítására. Matematikatörténet: Napier, Kepler. A logaritmus fogalmának kiala- kulása.</p>	<p><i>Technika, életvitel és gyakorlat: zaj- szennyezés. Kémia: pH-számítás.</i></p>
<p>Kulcsfogalmak / fo- galmak</p>	<p>n-edik gyök, logaritmus.</p>

Tematikai egység	Számelmélet, oszthatóság – 16 óra	
Előzetes tudás	Osztó, többszörös, prímszám, prímtényező felbontás, legnagyobb közös osztó, leg- kisebb közös többszörös.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A korábbi években szerzett ismeretek elmélyítése, bővítése.	
Ismeretek / fejlesztési követelmények	Kapcsolódási pontok	
Euler-féle p függvény. Kis Fermat-tétel. Wilson-tétel. Néhány speciális prím (Mersenne-prímek, Fermat-prímek). Tökéletes számok.		
Kongruenciák és tulajdonságai. Maradékosztályok. Diofantoszi egyenletek. Lineáris diofantoszi egyenlet. Az $ax + by + cxy = d$ típusú diofantoszi egyenlet. Szöveges feladatok megoldása diofantoszi egyenlettel. Pitagoraszi számhármakok. Matematikatörténet: Diophantos, Eukleidész, Eratoszthenész, Euler, Fermat.		
Kulcsfogalmak / fo- galmak	Számelméleti függvény, kongruencia, maradékosztály.	

Tematikai egység	Egyenlet, egyenlőtlenség, egyenletrendszer – 20 óra	
Előzetes tudás	Egyismeretlenes, elsőfokú és másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása. Alaphalmaz vizsgálata, ellenőrzés. Azonosság. Szöveges feladatok - matematikai modell alkotása.	
A tematikai egység ne- velési-fejlesztési céljai	Gyakorlati problémák matematikai modelljének felállítása, a modell hatókörének vizsgálata, a kapott eredmény összevetése a valósággal; az ellenőrzés fontossága. A problémához illő számítási mód kiválasztása, eredmény kerekítése a problémának megfelelően. Számológép használata. Az önellenőrzés képességének fejlesztése.	
Ismeretek / fejlesztési követelmények	Kapcsolódási pontok	

Másodfokú egyenlőtlenségek. A megoldás megadása másodfokú függvény vizsgálatával. Többféle megoldási módszer összevetése.	
Másodfokú egyenletrendszer. Másodfokú egyenletrendszerrel megoldható szöveges feladatok. Emlékezés korábban megismert módszerekre, alkalmazás az adott környezetben.	<i>Fizika:</i> ütközések.
Gyökös egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek. Ekvivalens és nem ekvivalens egyenlet-megoldási lépések. Hamis gyök, gyökvesztés. Önellenőrzés képességének fejlesztése.	
Paraméteres másodfokú és másodfokúra visszavezethető egyenletek. Esetsztévválasztások, divergens gondolkodás fejlesztése. Paraméteres másodfokú egyenlőtlenségek.	
Magasabb fokú egyenletek. Egész együttthatós polinom egész és racionális gyökei. Bezout tétele. Gyökök és együttthatók közti összefüggés. Horner-elrendezés. Matematikatörténet: magasabb fokú egyenletek megoldhatósága. Cardano, Galois, Abel.	
Exponenciális egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek. Megoldás a definíció és az azonosságok alkalmazásával. Exponenciális egyenletre vezető valós problémák megoldása.	<i>Földrajz:</i> globális problémák (pl. demográfiai mutatók, a Föld eltartó képessége és az élelmezési válság, betegségek, világjárványok, túltermelés és túlfogyasztás).
Logaritmikus egyenletek egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek Megoldás a definíció és az azonosságok alkalmazásával. Értelmezési tartomány vizsgálatának fokozott szükségessége logaritmusos egyenleteknél.	<i>Kémia:</i> pH-számítás
Paraméteres exponenciális és logaritmusos egyenletek.	
Kulcsfogalmak / fogalmak	Egyenletrendszer. Négyzetgyökös egyenlet. Paraméteres egyenlet. Magasabb fokú egyenletek. Exponenciális és logaritmikus egyenlet, egyenlőtlenség, egyenletrendszer.

Tematikai egység	Függvények – 15óra
Előzetes tudás	Halmazok. Hozzárendelés fogalma. Grafikonok készítése, olvasása. Pontok ábrázolása koordináta-rendszerben. Lineáris, másodfokú, gyökfüggvények.
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A tanult függvények felidézése. Függvénytranszformációk algebrai és geometriai megjelenítése. Összefüggések, folyamatok megjelenítése matematikai formában (függvénymodell), vizsgálat a grafikon alapján. A vizsgálat szempontjainak kialakítása. Számítógép bevonása a függvények ábrázolásába, vizsgálatába. Logikus, pontos gondolkodás, fogalmazás fejlesztése.
Ismeretek / fejlesztési követelmények	Kapcsolódási pontok
Exponenciális függvények.	
Logaritmikus függvények.	<i>Fizika:</i> régészeti leletek – kormeghatározás.

<p>Függvénytranszformációk. A tanult függvények többlépéses transzformációi. $A f(ax+b) + B$ ábrázolása A transzformációk rendszerezése, transzformációs sorrend. $f(x)$ és $f(x)$ ábrázolása. Adott tulajdonságú függvények konstruálása.</p>	<p>A 9. évfolyamban tanultak elmélyítése</p>
<p>A sorozat fogalma, megadása, ábrázolása. Korábbi ismeretek rendszerező ismétlése. Sorozat megadása rekurzióval – Fibonacci-sorozat – aranymetszés. Rekurzív sorozat n-edik elemének megadása. Matematikatörténet: Fibonacci.</p>	<p><i>Informatika:</i> algoritmusok.</p>
<p>Számtani sorozat. A számtani sorozat n-edik tagja. A számtani sorozat első n tagjának összege. Mértani sorozat. A mértani sorozat n-edik tagja. A mértani sorozat első n tagjának összege. Számítási feladatok számtani és a mértani sorozatokra. Szöveges feladatok gyakorlati alkalmazásokkal. A számtani sorozat mint lineáris és a mértani sorozat mint exponenciális függvény összehasonlítása. Gyakorlati alkalmazások – kamatos kamat számítása. Törlesztési feladatok. Pénzügyi alapfogalmak – kamatos kamat, törlesztőrészlet, hitel, THM, gyűjtőjárdék. Véges sorok összegzése. Számtani és mértani sorozatból előállított szorzatok összegzése.</p>	<p><i>Fizika; kémia; biológia-egészségtan; földrajz; történelem, társadalmi és állampolgári ismeretek:</i> lineáris és exponenciális folyamatok. <i>Technika, életvitel és gyakorlat:</i> hitel – adósság – eladósodás.</p>
<p>Kulcsfogalmak / fogalmak</p>	<p>Függvény, értelmezési tartomány, értékészlet, zérushely, monotonitás, szélsőérték, paritás. Függvénygrafikon, függvénytranszformáció. Sorozat, számtani sorozat, mértani sorozat, kamatos kamat, rekurzív sorozat.</p>

Tematikai egység	Statisztika, valószínűség – 5 óra	
Előzetes tudás	Kombinatorikai ismeretek.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A valószínűség és a relatív gyakoriság fogalmának mélyítése, kapcsolatuk belátása.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények	Kapcsolódási pontok	
Véletlen jelenségek megfigyelése. Kocka- és pénzérmédobások - csoportmunka.	<i>Informatika:</i> véletlen jelenségek számítógépes szimulációja.	
Esemény, biztos esemény, lehetetlen esemény, komplementer esemény. Műveletek eseményekkel. Egyszerűbb események valószínűsége. Klasszikus valószínűségi modell. A valószínűség meghatározása kombinatorikus eszközökkel.		
Geometriai valószínűség. Feltételes valószínűség, függetlenség. Teljes valószínűség tétele, Bayes tétele.		

Kulcsfogalmak / fogalmak	Esemény, valószínűség.
--------------------------	------------------------

11-12. évfolyam

Ez a szakasz az eddigi matematikatanulás szintézisét adja, és egyben kiteljesíti a kapcsolatokat a többi tantárgygal, valamint a mindennapi élet matematikaigényes elemeivel. A matematikatanulásban kialakult rendszeresség, problémamegoldó képesség az élet legkülönbözőbb területein segíthet. Ezt célszerű tudatosítani a tanulóknál.

Ez a kerettantervi elem a matematika főiskolai-egyetemi tanulására való felkészítést célozza meg. A problémamegoldó képességen túl fontos az önálló rendszerezés, lényegkiemelés, történeti áttekintés készségének kialakítása, az alkalmazási lehetőségek megtalálása, a kapcsolatok keresése különböző témakörök között.

Ebben az időszakban áttekintését adjuk a korábbi évek ismereteinek, eljárásainak, problémamegoldó módszereinek, miközben sok, gyakorlati és elméleti területen széles körben használható tudást is közvetítünk, amelyek összetettebb problémák megoldását is lehetővé teszik. Az érettségi előtt már elvárható a tanulóktól többféle készség és ismeret együttes alkalmazása. Minden témában hangsúlyosan kell kitérnünk a gyakorlati alkalmazásokra, az ismeretek más tantárgyakban való felhasználhatóságára.

A sorozatok, kamatos kamat témakör kiválóan alkalmas a pénzügyi, gazdasági problémákban való jártasság kialakításra. A korábbiaknál is nagyobb hangsúlyt kell fektetni a különböző gyakorlati problémák optimumát kereső feladatokra. Ezért az ilyen problémák elemi megoldását külön fejezetként iktatjuk be.

Az analízis témakörben a szemléletesség segíti a problémák átlátását, az egzaktság pedig a felsőfokú képzésre való készülést.

A rendszerező összefoglalás, túl azon, hogy az eddigi matematikatanulás szintézisét adja, mintaként szolgálhat a későbbiekben is bármely területen végzett összegző munkához.

11. évfolyam (37*2 = 74 óra)

Tematikai egység	Gondolkodási módszerek, halmazok, matematikai logika – 10 óra	
Előzetes tudás	Halmaz fogalma, halmaz számossága. Kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés. Bizonyítási módszerek.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Korábban megismert fogalmak ismétlése, elmélyítése.	
Ismeretek / fejlesztési követelmények	Kapcsolódási pontok	
Számhalmazok. Számhalmazok bővítésének szükségessége a természetes számoktól a komplex számokig. Algebrai számok, transzcendens számok. Halmazok számossága. Halmazok ekvivalenciája. Számosság. Végtelen és véges halmazok. Megszámlálható és nem megszámlálható halmazok. Kontinuumsejtés. Matematikatörténet: Cantor, Hilbert, Gödel.	<i>Filozófia:</i> Gondolati rendszerek felépítése. Bizonyíthatóság.	
A matematika felépítése. Fogalmak, alapfogalmak, axiómák, tételek, sejtések. Műveletek a matematikában. Műveleti tulajdonságok. Relációk a matematikában és a mindennapi életben. Relációtulajdonságok. Bizonyítási módszerek áttekintése. Direkt, indirekt bizonyítás, skatulyaelv, teljes indukció. Tételek megfordítása.	<i>Filozófia:</i> Gondolati rendszerek felépítése. Állítások igazolásának szükségessége.	
Kulcsfogalmak/fogalmak	Művelet, reláció. Halmazok számossága, megszámlálható és nem megszámlálható halmaz. Bizonyítási módszer. A matematika axiomatikus felépítése.	

Tematikai egység	Sorozatok – 25 óra	
Előzetes tudás	Számítási sorozat, mértani sorozat fogalma, egyszerű alapösszefüggések.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A hétköznapi életben, matematikai problémában a sorozattal leírható mennyiségek észrevétele. Sorozatok megadási módszereinek alkalmazása. Összefüggések, képletek hatékony alkalmazása.	
Ismeretek / fejlesztési követelmények	Kapcsolódási pontok	
Sorozatok korlátossága, monotonitása, konvergenciája. A határérték szemléletes és pontos definíciói. Műveletek konvergens sorozatokkal. Konvergens és divergens sorozatok. Nevezetes sorozatok határértéke. Konvergens sorozatok tulajdonságai, konvergenciakritériumok. Torlódási pont. Konvergens sorozatnak egy határértéke van. Minden konvergens sorozat korlátos. Monoton és korlátos sorozat konvergens. Az e szám. Konvergens sorozatokra vonatkozó egyenlőtlenségek. Rendőrelv.		
Végtelen sorok. Végtelenen sor konvergenciája, összege. Végtelen mértani sor. Szakaszos végtelen tizedes tört átváltása. További példák konvergens sorokra.		
Négyzetszámok reciprokainak összege. Példák nem konvergens sorokra. Harmonikus sor. Feltételesen konvergens sorok. Cantor-axióma. A kör kerülete.		
Kulcsfogalmak / fogalmak	Korlátosság, monotonitás, konvergencia, divergencia. Sor, sor összege, végtelen mértani sor.	

Tematikai egység	Folytonosság, differenciálszámítás – 30 óra	
Előzetes tudás	Függvények megadása, értelmezési tartomány, értékészlet. Függvények jellemzése: zérushely, korlátosság, szélsőérték, monotonitás, paritás, periodicitás. Sorozatok határértéke.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Megismerkedés a függvények vizsgálatának új módszerével. A függvény folytonossága és határértéke fogalmának megalapozása. A differenciálszámítás módszereinek használata a függvények lokális és globális tulajdonságainak vizsgálatára. A matematikán kívüli területeken – fizika, közgazdaságtan – is alkalmazások keresése.	
Ismeretek / fejlesztési követelmények	Kapcsolódási pontok	
A valós számok halmazán értelmezett függvények jellemzése. Korábbi ismeretek rendszerező ismétlése.	<i>Informatika:</i> számítógépes szoftver alkalmazása függvények grafikonjának megrajzolására.	
A függvények folytonossága. Példák folytonos és nem folytonos függvényekre. A folytonosság definíciói. Intervallumon folytonos függvények. Korlátos és zárt intervallumon folytonos függvények tulajdonságai.	<i>Fizika:</i> példák folytonos és diszkrét mennyiségekre.	

<p>Függvény határértéke. A függvények határértékének szemléletes fogalma, pontos definíciói. Jelölések. Függvények véges helyen vett véges; véges helyen vett végtelen; végtelenben vett véges; végtelenben vett végtelen határértéke. A sorozatok és a függvények határértékének kapcsolata. A $\sin x$ függvény vizsgálata, az $x = 0$ helyen vett határértéke.</p>	<p><i>Informatika:</i> a határérték számítógépes becslése. <i>Fizika:</i> felhasználás $\sin x$, illetve $\tan x$ közelítésére kis szög esetében.</p>
<p>Bevezető feladatok a differenciálhányados fogalmának előkészítésére. A függvénygörbe érintőjének iránytangense. A pillanatnyi sebesség meghatározása.</p>	<p><i>Fizika:</i> Az út-idő függvény és a pillanatnyi sebesség kapcsolata. A fluxus és az indukált feszültség kapcsolata. <i>Biológia-egészségtan:</i> populáció növekedésének átlagos sebessége.</p>
<p>A differenciálhatóság fogalma. A különbségi hányados függvény, a differenciálhányados (derivált), a deriváltfüggvény. Példák nem differenciálható függvényekre is. Grafikon érintőjének egyenlete. Kapcsolat a differenciálható és a folytonos függvények között. Alapfüggvények deriváltja Műveletek differenciálható függvényekkel. Függvény konstansszorosának deriváltja, összeg-, szorzat-, hányados-, összetett függvény deriváltja. Inverz függvény deriváltja. Exponenciális és logaritmusfüggvény deriváltja. Magasabb rendű deriváltak. Matematikatörténet: Fermat, Leibniz, Newton, Cauchy, Weierstrass.</p>	<p><i>Fizika:</i> harmonikus rezgőmozgás kitérése, sebessége, gyorsulása – ezek kapcsolata.</p>
<p>A függvény tulajdonságai és a derivált kapcsolata. - Lokális növekedés, fogyás - intervallumon monoton függvény. - Szélsőérték - lokális szélsőérték, abszolút szélsőérték. A szükséges és az elégséges feltételek pontos megfogalmazása, alkalmazása.</p>	<p><i>Fizika:</i> fizikai tartalmú függvények (pl. út-idő, sebesség-idő) deriváltjainak jelentése.</p>
<p>Középértéktételek. Rolle- és Lagrange-tétel. L'Hospital-szabály.</p>	
<p>Konvexitás vizsgálata deriválással. A konvexitás definíciója. Inflexiós pont. A második derivált és a konvexitás kapcsolata.</p>	
<p>Függvényvizsgálat differenciálszámítással. Összevetés az elemi módszerekkel.</p>	
<p>Gyakorlati jellegű szélsőérték-feladatok megoldása. A differenciálszámítás és az elemi módszerek összevetése.</p>	<p><i>Fizika:</i> Fermat-elv, Snellius-Descartes- törvény. Fizikai jellegű szélsőérték-problémák.</p>
<p>Kulcsfogalmak / fogalmak</p>	<p>Függvényfolytonosság, határérték. Különbségi hányados függvény, derivált, deriváltfüggvény, magasabb rendű derivált. Monotonitás, lokális szélsőérték, abszolút szélsőérték. Konvex, konkáv függvény</p>

<p>Tematikai egység</p>	<p>Komplex számok – 9 óra</p>
-------------------------	--------------------------------------

Előzetes tudás	Valós számok, és valós számok körében végzett műveletek. Trigonometriai ismeretek.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Számhalmazok bővítésének elvei.	
Ismeretek / fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>Számhalmazok.</p> <p>Számhalmazok bővítésének szükségessége a természetes számoktól a komplex számokig.</p> <p>Algebrai számok, transzcendens számok.</p> <p>Komplex számok, komplex számsík.</p> <p>Műveletek komplex számokkal.</p> <p>Geometriai feladatok megoldása komplex számok alkalmazásával.</p>		
Kulcsfogalmak / fogalmak	Komplex számok, komplex számsík.	

12. évfolyam (30*2 = 60 óra)

Tematikai egység	Integrálszámítás – 40 óra	
Előzetes tudás	Folytonos függvények fogalma. Sorozatok, véges sorok. Differenciálási szabályok ismerete. Határozatlan integrál, primitív függvény	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Az integrálszámítás módszereivel találkozva a közelítő módszerek ismeretének bővítése. A függvény alatti terület alkalmazásai a matematika és a fizika több területén.	
Ismeretek / fejlesztési követelmények	Kapcsolódási pontok	
Bevezető feladatok az integrál fogalmához. Függvény grafikonja alatti terület. A megtett út és a sebesség-idő grafikon alatti terület. A munka kiszámítása az erő-út grafikon alatti terület alapján.		
Alsó és felső közelítő összegek. Az intervallum felosztása, a felosztás finomítása. Közelítés véges összegekkel. A határozott integrál fogalma, jelölése. A szemléletes megközelítésre alapozva eljutás a pontos definícióig. Példa nem integrálható függvényre is. Negatív függvény határozott integrálja. A határozott integrál és a terület-előjeles terület. Az integrál közelítő kiszámítása. Számítógépes szoftver használata a határozott integrál szemléltetésére. Matematikatörténet: Bernhard Riemann.	<i>Informatika:</i> számítógépes szoftver használata.	
Az integrálhatóság szükséges és elegendő feltétele. Korlátos és monoton függvények integrálhatósága. A határozott integrál tulajdonságai.	<i>Fizika:</i> A munka és a mozgási energia. Ponthalmaz tömegközéppontja. A hidrosztatikai nyomás és az edény oldalfalára ható erő.	
Az integrál mint a felső határ függvénye. Integrálfüggvény. Folytonos függvény integrálfüggvényének deriváltja. Kapcsolat a differenciálszámítás és az integrálszámítás között. A primitív függvény fogalma. A primitív függvények halmaza – a határozatlan integrál:		
A Newton-Leibniz-tétel. Integrálási módszerek: Integrálás helyettesítéssel. Parciális integrálás. Matematikatörténet: Newton, Leibniz, Euler.		
Az integrálszámítás alkalmazása matematikai és fizikai problémákra. Két függvénygörbe közötti terület meghatározása. Forgástest térfogatának meghatározása. Henger, kúp, csonka kúp, gömb, gömbszelet térfogata. Az integrálás közelítő módszerei.	<i>Fizika:</i> Potenciál, munkavégzés elektromos, illetve gravitációs erőterben. Váltakozó áram munkája, effektív áram és feszültség. Newton munkássága.	
Néhány egyszerűbb improprius integrál. Néhány hatványsor. Hatványsorok szerepe a matematikában, fizikában, informatikában. Hogyan számolnak az egyszerű számológépek 12 jegy pontossággal?		

Kulcsfogalmak / fogalmak	Alsó és felső közelítő összeg, határozott integrál. (Primitív függvény, határozatlan integrál.) Newton-Leibniz-tétel. Forgástest térfogata.
--------------------------	---

Tematikai egység	Kúpszeletek – 10 óra	
Előzetes tudás	Nevezetes ponthalmazok.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A sík- és térgeometriai szemlélet, látásmód fejlesztése.	
Ismeretek / fejlesztési követelmények	Kapcsolódási pontok	
Parabolát, ellipszist, hiperbolát jellemző paraméterek. Kúpszeletek érintői. Kúpszeletek származtatása (Dandelin-gömbök). Mértani helyek.	<i>Fizika:</i> csillagászat.	
Kulcsfogalmak	Parabola, ellipszis, hiperbola, fókuszpont, vezéregyenes.	

Tematikai egység	Lineáris algebra – 10 óra	
Előzetes tudás	Vektor, reláció, művelet, műveleti tulajdonságok.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A vektor fogalmának bővítése, mátrix ismerete, mátrixműveletek megismerése, alkalmazása.	
Ismeretek / fejlesztési követelmények	Kapcsolódási pontok	
Determináns. Kifejtési tétel. Determinánsra vonatkozó tételek. Sor- és oszlopvektorok, mátrixok. Vektorok és mátrixok összeadása, számmal való szorzása. Lineáris kombináció, lineáris függőség, függetlenség. Lineáris vektortér, a vektortér bázisa. Lineáris egyenletrendszerek. A lineáris programozás elemei. Mátrixok inverze.		
Kulcsfogalmak	Vektor, mátrix, lineáris egyenletrendszer, determináns	